数理解析研究所講究録
第762巻 1991年 201-211

複数種相互作用系の管理についての理論的研究
A theoretical study on the management of multi-species system

原田泰志（Harada Yasushi, 東京水産大学・資源管理学科）
中島久男（Nakajima Hisao, 立命館大学・理工学部）

Abstract

Management of multi-species systems is studied by using simple mathematical models. The maximal sustainable yield that maximizes the total sustainable production, and the maximal economic yield that mazimizes the total sustainable net economic production (i.e. production minus cost) are obtained for the system governed by Lotka-Volterra equations. It is shown that the result obtained from the logistic equation can be applied to the Lotka-Volterra system with a slight modification, if the interaction between species is symmetric. Applicability of a feedback control procedure of the fishing effort is also studied, in which fishing effort is increased if the current stock level is larger than the target and *vice versa*. It is shown that the target equilibrium which is attainable by estimating the fishing effort that realizes it, is equally attainable by feedback procedure without estimating the appropriate fishing effort.

序論

水産資源はそれ自身が成長し繁殖する生物であるため、利用してもまた再生してくるという特徴がある。そこで、資源の再生産能力をいかにうまく利用していくかという観点からさまざまな研究がなされ、それを応用した管理が実施されてきた。それらの多くの基礎になっているのが最大持続生産量（Maximum Sustainable Yield：以下MSYとよぶ）と最大経済生産量（Maximum Economic Yield：以下MEYとよぶ）の概念である。それぞれ「持続的にあげられる最大の物的水揚げ量」と「持続的にあげられる最大の純経済生産」と定義され（Gordon 1954）、たとえば簡単な数学モデルを使って以下のように説明される。

漁業が行なわれていないときの資源量（x）の変化が次のような微分方程式によって表されるとする。

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

処女資源（漁獲を経験してない資源）は、ある定常量（処女資源量とよぶ）に維持されていただろうから、図１に示すように、増殖率$f(x)$はxが処女資源量を下回れば正になり、上回れば負になると考えられる。そして、どこか0と処女資源量の中間のxで最大になると考えられる。この資源に対して漁獲が行なわれると、xの変化は次のようになる。

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - ex$$

ここでeは漁獲率である。さて、このとき、xの平衡値x^*は図２に示すようにeが高まるにつれ下がっていく。平衡状態における漁獲量（Sustainable Yield：持続生産量）はx^*とeの積であるが、それは図３のように変化していき、ある漁獲率のときに最大になり、それより漁獲率をあげてもさげてもそれ以下の持続生産量しかあげられない。この最大の持続生産量がMSYである。

Fig. 1

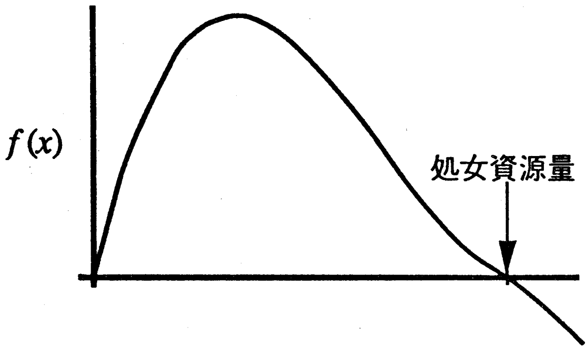


Fig. 2

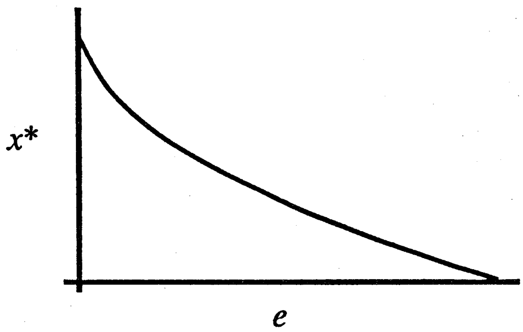


Fig. 3

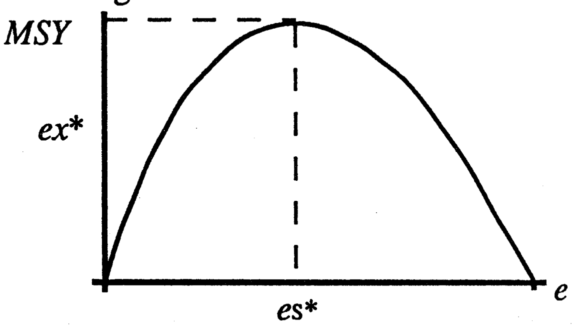
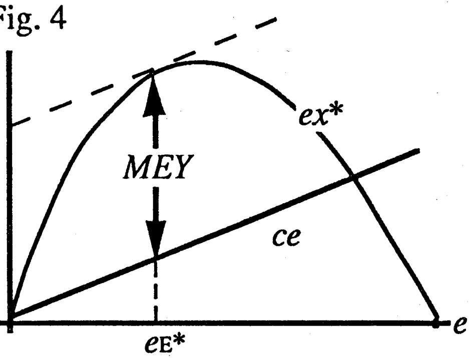


Fig. 4



MSYの実現は食糧生産の増大が最重要であるときに採用されるべき管理目標といえるが、つねに食糧生産の最大化が最重要であるとは限らない。たとえば、漁業からあがる利益を最大にするような管理基準も考えられる。このときには生産物の売上（生産量と単価の積）と生産にかかるコストの差（Net Economic Yield：純経済生産）を最大にすべしという目標を設定すべきである。最大純経済生産は、単価が生産量によらず一定で、なおかつ生産にかかるコストが漁獲率に比例する場合には図４のように求められ

る（漁獲物の単価を１、また生産コストは漁獲率に比例するとした）。MEYを実現する漁獲率（e_E^*）はMSYを実現する漁獲率（e_S^*）より小さく、MEYを実現する資源量はMSYを実現する資源量より大きくなる。

資源がロジスティック方程式に従うときには

$$f(x) = (k - ax)x$$

となり、MSYおよびMEYは次のように、もとめられる（付録１）。

$$MSY = \frac{k^2}{4a}\ ,\ \left(x^{**} = \frac{k}{2a},\ e^* = \frac{k}{2}\right) \tag{1}$$

$$MEY = \frac{(k - ac)^2}{4a}\ ,\ \left(x^{**} = \frac{k}{2a} + \frac{c}{2},\ e^* = \frac{1}{2}(k - ac)\right) \tag{2}$$

x^{**}、e^*はそれぞれを実現する資源量および漁獲率である。これらから、MSYを実現するには資源量を処女資源量（k/a）の半分に維持すればよいこと、MEYを実現するには資源量を処女資源量の半分と単位漁獲率あたりのコストの半分の和に維持すればよいことがわかる。

これまでの議論では単一資源種のモデルを用いてMSYやMEYを計算してきた。しかし、現実には複数の資源種が競争や捕食などの相互作用をしていることも多く、それらの相互作用を考慮して管理方策を立てなければならない状況も多いと考えられる。たとえば、競争関係にある２種のうちの一方を漁獲して減らすことは、もう一方の種の資源量を増大させる効果があるだろうし、餌になっている種を漁獲して減らすことは、それを捕食している種の資源量を減らす効果があるだろう。

さらに、３種以上の種が関係しているときには、ある種（A）に対する漁獲が別の種（B）に与える影響をAとBのあいだの直接の関係だけからは予想できないこともありうる。そのような例として、A、B、Cの３種が競争関係にある状況（図５a）を考えてみる。Aを漁獲することは直接的にはBの資源量を増やすように働く。しかし、それと同時にCをも増やすようにも働くため、Bの競争者が増加し、これはBの資源量を減らす方向に働く。すなわち、漁獲によるAの減少は間接的にBの資源量を減らす効果も持つことになる。そして、実際にBが減るか増えるかはこれらの直接、間接の影響の総和で決まることになる。同じようなことが互いに競争関係にある2種の餌種A、Bと捕食者Pとからなる系（図5b）でもみられる。捕食者Pを漁獲することは、餌種にとっては食われる確率が下がることを意味するから、直接的にはAに対してプラスに働く。しかし、それは同時に餌種Bにとってもプラスに働くから、Aにとっては競争者が増加することになり、A を減らす間接的効果がある。この場合も相対的にどちらが大きいかによって実際のAの変化は決まることになる。

本論文では、まず次の節で、これらの直接、間接の相互作用のある系でのMSYやMEYについて考察する。その後、これらの管理目標を実現する方法としてのフィード

バック管理方式（Tanaka 1980）についても考察することにする。

Fig. 5a

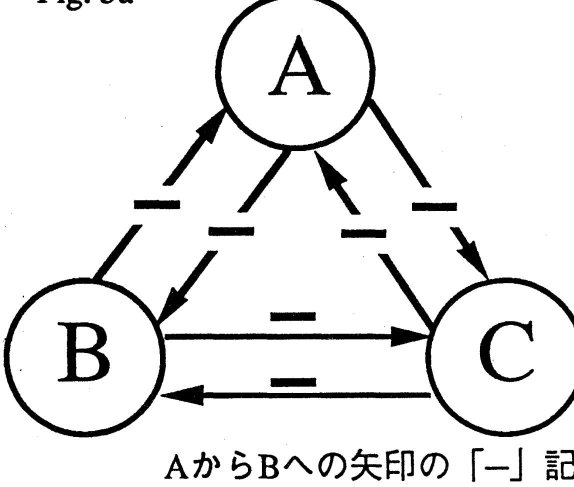
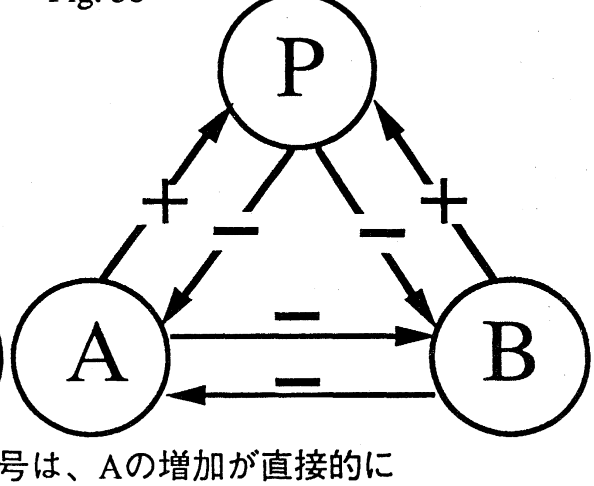


Fig. 5b



AからBへの矢印の「－」記号は、Aの増加が直接的にはBを減らすように働くことを示す（その他も同様）。

複数種相互作用系におけるMSYとMEY

n種の資源種が相互作用している系に対する漁獲を考える。とくに、それぞれの資源種の再生産がロトカ・ボルテラ方程式系に従う場合を考える。すなわち、それぞれの種の資源量は次の方程式に従うものとする。

$$\frac{dx_i}{dt} = (k_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)x_i - e_i x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3)$$

ここで、x_i 、k_i 、e_i はそれぞれ第i種の資源量、内的自然増加率および漁獲率である。また、a_{ij} は相互作用を表す係数で、第i種が第j種を捕食しているなら$a_{ij} < 0$かつ$a_{ji} > 0$、第i種と第j種が競争関係にあるなら$a_{ij} > 0$かつ$a_{ji} > 0$、共生関係にあるなら$a_{ij} < 0$かつ$a_{ji} < 0$である。(3)は行列とベクトルを用いて次のようにも表せる。

$$\frac{d\ln \mathbf{x}}{dt} = \mathbf{k} - \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{e}$$

ここでx、k、eはそれぞれx_i 、k_i 、e_i を第i成分とするn次元縦ベクトル。$\mathbf{A}$はa_{ij} を第ij成分とするn次元正方行列である。また$\frac{d\ln \mathbf{x}}{dt}$ は$\frac{d\ln x_i}{dt}$ を第i成分とするn次元縦ベクトルである。

各資源種に対する漁獲率が独立に調節できるとすると、総持続生産量

$$\sum_{i=1}^{n} e_i x_i^* = {}^t\mathbf{e}\mathbf{x}^*$$

を最大にする、すなわちMSYを実現する資源量$\mathbf{x}_S^{**}$および漁獲率$\mathbf{e}_S^{*}$はそれぞれ

$$\mathbf{x}_S^{**} = \mathbf{A}^{-1}\{\mathbf{A}^{-1} + {}^t(\mathbf{A}^{-1})\}^{-1}\,{}^t(\mathbf{A}^{-1})\mathbf{k} \qquad (4\text{-a})$$

$$\mathbf{e}_S^* = \{\mathbf{A}^{-1} + {}^t(\mathbf{A}^{-1})\}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} \qquad (4\text{-b})$$

と求められる（付録２）。ただし、すべての種を漁獲している状態に最適状態があることを仮定している（以下も同様）。また

$$\mathbf{A}^{-1} + {}^t(\mathbf{A}^{-1}) \qquad (4\text{-c})$$

は正値定符号でなければならない。

各種の漁獲率を高めるのにかかるコストが独立であるとすると、総持続経済生産

$$\sum_{i=1}^{n} p_i e_i x_i^* - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = {}^t\mathbf{e}(\mathbf{P}\mathbf{x}^* - \mathbf{c})$$

を最大にする、すなわちMEYを実現する資源量$\mathbf{x}_E$**および漁獲率$\mathbf{e}_E$*はそれぞれ

$$\mathbf{x}_E^{**} = \mathbf{A}^{-1}\left[\mathbf{k} - \{\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} + {}^t(\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1})\}^{-1}\{\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} - \mathbf{c}\}\right] \qquad (5\text{-a})$$

$$\mathbf{e}_E^* = \{\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} + {}^t(\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1})\}^{-1}\{\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} - \mathbf{c}\} \qquad (5\text{-b})$$

と求められる（付録１）。ただし

$$\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} + {}^t(\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}) \qquad (5\text{-c})$$

が正値定符号の行列でなければならない。ここでp_iは第i種の単価（漁獲高によらず一定と仮定）、$\mathbf{P}$はp_iをii成分にもつn次元対角行列である。またc_iは第i種に対する漁獲率を単位量あげるのに必要なコストである。当然のことながら、iによらず$p_i = 1$かつ$c_i = 0$の場合には$\mathbf{x}_S^{**} = \mathbf{x}_E^{**}$かつ$\mathbf{e}_S^* = \mathbf{e}_E^*$となる。

(4)式や(5)式のようにロトカ・ボルテラ系におけるMSYやMEYを実現する資源量や漁獲率を求めることができた。しかし、これらの式をみると、MSYやMEYを実現するために推定しなければならないパラメターが非常に多いのに気づく。各種の内的自然増加率k_iおよび相互作用の係数a_{ij}を推定しなければならないのだ。種数がnのとき前者はn個、後者はnの２乗個あり、つごう$n(n+1)$個のパラメターを推定しなければならなくなる（２種で６個、３種で１２個、４種で２０個．．．）。３種以上になればほとんど推定不可能だろうし、２種でも困難であろう。このような大量のパラメターを推定せずにはMSYやMEYを実現できないのであろうか。

実は可能な場合があるのである。(5)式で$\mathbf{A}$が対称行列、すなわち$a_{ij} = a_{ji}$である場合を考えてみる。すなわち種間の相互作用が対称な場合である。この場合には

$$\mathbf{x}_S^{**} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} \qquad (6\text{-a})$$

$$\mathbf{e}_S^* = \frac{1}{2}\mathbf{k} \qquad (6\text{-b})$$

となることが(4)式よりわかる。漁獲が行なわれていない処女資源量が

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k}$$

であらわされることを考えると、MSYを実現するにはそれぞれの種の資源量をすべて処女資源量の半分に維持するようにすればよいことがわかる。内的増加率が大きい種は少々の漁獲圧がかかってもあまり減少しないだろうが、内的増加率が小さい種は漁獲圧

がかかると大きく減少してしまうだろう。(6-a)式は漁獲圧の影響を受けやすい種と受けにくい種の減少の割合が同じになるようにすべしということを意味しており、それは(6-b)式に表されるように、内的増殖率の大きい種の漁獲率を高く、小さい種の漁獲率を低くすることにより実現される。

さらに $p_i = 1$のとき、すなわちすべての種の単価が等しいときには

$$\mathbf{x}_{\mathrm{E}}^{**} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{c} \qquad (7\text{-a})$$

$$\mathbf{e}_{\mathrm{E}}^{*} = \frac{1}{2}\mathbf{k} - \frac{1}{2}\mathbf{A}\,\mathbf{c} \qquad (7\text{-b})$$

であり、MEYを実現するにはそれぞれの種の資源量をすべて処女資源量の半分と単位漁獲率あたりのコスト（水揚げの単価を1とする）の半分の和に維持するようにすればよいことが(7)式よりわかる。すなわち、とりにくい種（漁獲率をあげるのにコストが多くかかる種）はあまり減らさず、そうでない種は大きく減らす、しかしどの種も処女資源量の半分以下にはへらさないようにすべしということになる。（以上のうち、MSYについてはFAO（1980）に同様のことが示されている。）

ところで、相互作用が対称になるのはどのような場合であろうか。ここでは詳しく論じないが、それぞれの種が餌をめぐる競争関係にある場合には、競争係数が対称になりうることが示されている（MacArthur と Levinsの消費競争系，(MacArthur & Levins, 1967)）。

複数種相互作用系のフィードバック管理

ここまで、複数の種が相互作用する系において持続生産量や純経済生産を最大にする資源量や漁獲率を求めてきた。そしてたとえば相互作用が対称な場合には、各種の資源量を処女資源量の半分にすればMSYが実現されることなどがわかった。しかし、この場合でもそれを実現する漁獲率を推定するには、各種の内的増加率の推定値が必要であり、たとえそれが推定できても、実際にどれくらいの漁獲努力（たとえば投網回数）を投入すればどれくらいの漁獲率になるのかは不明なことが多い。そのため、適当な漁獲率を実現する漁獲努力の推定は困難である。また、MSYやMEYの実現はあきらめて、それぞれの種をあらかじめ決めたある目標レベルに維持することを目指すとしても、ロトカ・ボルテラ方程式に従う系でも相互作用が対称でない場合には、種数nに対し$n(n+1)$個のパラメターを推定せねば目標を実現する努力量は求められないため、それも不可能である。では複数種の相互作用系を管理するのは不可能なのだろうか。

大量のパラメターによりあらわされる再生産関係の推定は不可能であっても、努力量あたり漁獲量（CPUE：たとえば一回の投網あたりの漁獲量）などの形で資源の相対的な量を見積ることはできよう。たとえばCPUEが資源量に比例する場合には、処女資源に対する漁獲開始時にくらべCPUEが半分になるように漁獲努力を調節すれば、資源量

を処女資源の半分に調節することができるだろう。また、漁獲データ以外の補助的手段により、絶対的な資源量の推定が得られることもあろう。そういうときに、資源量に関する情報だけをもとにして、再生産関係の推定なしに目標とする資源量に資源を調節する方法が考案されている。フィードバック管理方式（Tanaka 1980）である。

フィードバック方式のアイデアは簡単で、「資源量が目標とする資源量より多ければ漁獲を増やし、逆なら減らす、資源量が増大傾向にあれば漁獲を増やし、逆なら減らす」というものである。ここでは、目標資源量と現在資源量との差により漁獲努力をコントロールする方式により、相互作用しているそれぞれの種の資源量を目標値に近付けられる条件について考察する。

資源量の変化が

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(\mathbf{x}) - e_i x_i \tag{8-a}$$

と表されるとし、それに作用する次のような漁獲努力のフィードバック系を考える（$F_i(\mathbf{x})$はロトカ・ボルテラ方程式である必要はない）。

$$\frac{de_i}{dt} = h\frac{x_i - T_i}{T_i} \tag{8-b}$$

ここでhは正の定数であり、T_i は種iの目標資源量である。すなわち、目標資源量に対して相対的にどれだけ資源量がはなれているかに比例して努力量を増減しようというのである。目標とする平衡点は

$$\begin{aligned} x_i^* &= T_i \\ e_i^* &= \frac{F_i(\mathbf{T})}{T_i} \end{aligned} \tag{9}$$

である。この平衡点の局所安定性が、漁獲努力量にフィードバック制御をかけずに目標資源量を実現する努力量、e_i^*、に固定しておく系、

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(\mathbf{x}) - \frac{F_i(\mathbf{T})}{T_i}x_i \tag{10}$$

の平衡点、

$$x_i^* = T_i \tag{11}$$

の局所安定性と一致することを示すことができる。すなわち、漁獲努力量一定の系(10)の平衡点が局所的に安定ならば、フィードバック制御系(8)のそれに対応する平衡点も局所的に安定であり、その逆も成り立つ（付録３）。いいかえると、再生産関係を完全に決定し、それにもとづいて目標を実現する努力量を決定することにより目標状態の近傍から到達できる平衡点は、再生産関係を決定しないフィードバック方式によっても目標状態の近傍から到達できるのである。フィードバック方式は再生産関係を決定する方式に比べて実行が簡単であるが、目標の実現可能性は劣らないのである。（特に、資源がロトカ・ボルテラ方程式系に従い、未漁獲時の平衡点が大域安定である場合には、フィードバック系の目標平衡点(9)の大域安定性を示せる場合がある（付録４））。

さらに、ロトカ・ボルテラ系に従うn種の資源の場合には次のようなことを示すことができる。「相互作用の行列$-\mathbf{A}$がD-安定（例えばHofbauer & Sigmund 1984）のと

きには、処女資源が局所的に安定ならばフィードバック系の平衡点(9)も局所的に安定である。（付録５）」すなわち、安定な処女資源は、相互作用の行列–**A**がD-安定ならばフィードバック方式により安定に管理できる。ここで、あるn次元行列がD-安定とは、正の対角成分をもつ任意のn次元対角行列をかけても安定性が変化しないこと、すなわち実数部分が最大の固有値の実数部分の符号が変化しないことをいう。たとえば、対称の相互作用になる可能性のある場合としてあげたMacArthurとLevinsの消費競争系の相互作用行列は、たとえ対称にならない場合でもD-安定である。すなわち、餌をめぐる競争関係にある種の作るシステムは、処女状態で安定であるならフィードバック方式により安定に管理できることになる。

引用文献

FAO 1980 Fisheries Technical Paper No.181

Gordon, H. S. 1954 J. Polit. Economy **62**, 124-142

Hofbauer, J. & K. Sigmund 1984 The theory of evolution and dynamical systems. London Mathematical Society, Student Text **57**, Cambridge

MacArthur, R. H. and R. Levins 1967 Amer. Nat. **101**, 377-385

Tanaka, S. 1980 日本水産学会誌 **46**,1477-1482

付録１
ロジスティック式に従う資源におけるMSY、MEY

資源量の変化が

$$\frac{dx}{dt} = (k - ax)x - ex$$

であらわされるとき、平衡資源量は$0 < e < k$のときには

$$x^* = \frac{k - e}{a}$$

それ以外のときには0である。だから持続経済地代は$0 < e < k$のときに

$$e(x^* - c) = \frac{e(k - e - ac)}{a}$$

であり、これを最大にするeは

$$e^* = \frac{k - ac}{2}$$

そのときの資源量、純経済生産（MEY）は(2)式のようになる。(2)式で$c = 0$とすると(1)式が得られる。

付録2
ロトカ・ボルテラ系におけるMSY、MEY

(3)式で表される変化をする資源量の平衡状態は

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{k}-\mathbf{e}) \qquad \text{(A-1)}$$

である（本文中で断ったようにすべての資源を利用している平衡状態、すなわちすべてのiについて$e_i > 0$かつ$x_i^* > 0$なる平衡状態のみを考える）。このとき、総持続純経済生産

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{i=1}^{n} p_i e_i x_i^* - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \\ &= {}^t\mathbf{e}(\mathbf{P}\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) \\ &= {}^t\mathbf{e}(\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{k}-\mathbf{e}) - \mathbf{c})\end{aligned}$$

は、若干の計算により

$$\begin{aligned}\phi = &- {}^t\left\{\mathbf{e} - \mathbf{v}^{-1}\left(\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} - \mathbf{c}\right)\right\} \mathbf{v} \left\{\mathbf{e} - \mathbf{v}^{-1}\left(\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} - \mathbf{c}\right)\right\} \\ &+ {}^t\left\{\mathbf{v}^{-1}\left(\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} - \mathbf{c}\right)\right\} \mathbf{v} \left\{\mathbf{v}^{-1}\left(\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} - \mathbf{c}\right)\right\}\end{aligned}$$

と変形できる（ただし$\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} + {}^t\left(\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\right)$である）。

これからただちに、ϕが最大になるためには

$$\mathbf{e} - \mathbf{v}^{-1}\left(\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} - \mathbf{c}\right) = 0$$

かつ$\mathbf{v}$が正定値であることが必要十分であることがわかる。すなわち

$$\mathbf{e}_{\mathrm{E}}^* = \{\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} + {}^t(\mathbf{A}^{-1})\}^{-1}\{\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} - \mathbf{c}\} \qquad \text{(5-b)}$$

であり、これから

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\mathrm{E}}^{**} &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{k} - \mathbf{e}^*) \\ &= \mathbf{A}^{-1}\left[\mathbf{k} - \{\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} + {}^t(\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1})\}^{-1}\{\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} - \mathbf{c}\}\right]\end{aligned} \qquad \text{(5-a)}$$

が得られる。これらの式で$\mathbf{c} = \mathbf{0}$（0行列）、$\mathbf{P} = \mathbf{I}$（単位行列）とすれば、(4)式が得られる。

付録3
フィードバック系の平衡点の局所安定性

(8)式で表される系の平衡点(9)の局所安定性は、(8)式を(9)の近傍で線形化した方程式系

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}} y_j - e_i^* y_i - T_i z_i \qquad \text{(A-4-a)}$$

$$\frac{dz_i}{dt}=\frac{h}{T_i}y_j \qquad \text{(A-4-b)}$$

ただし、$y_i=x_i-T_i$、$z_i=e_i-e_i{}^*$である。ここで$i\neq j$ のとき

$$c_{ij}=\left.\frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}}$$

$i=j$ のとき

$$c_{ij}=\left.\frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{T}}-e_i{}^*$$

と定義し、さらにc_{ij}をij成分とするn次元正方行列を$\mathbf{C}$、T_iをii成分とするn次元対角行列を$\mathbf{U}$とすると(A-3)の局所安定性の問題は$2n$次元行列、

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\mathbf{C} & -\mathbf{U}\\ h\mathbf{U}^{-1} & 0\end{pmatrix}$$

の固有値の問題となり、$\mathbf{J}$の固有値の実数部分がすべて負であれば平衡点は局所安定となる。固有値の満たす特性方程式は

$$0=|\mathbf{J}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}\mathbf{C}-\lambda\mathbf{I} & -\mathbf{U}\\ h\mathbf{U}^{-1} & -\lambda\mathbf{I}\end{vmatrix}$$

すなわち

$$0=\begin{vmatrix}\mathbf{C}-\lambda\mathbf{I} & -\mathbf{U}\\ h\mathbf{U}^{-1} & -\lambda\mathbf{I}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{I} & 0\\ -\frac{h}{\lambda}\mathbf{U}^{-1} & \mathbf{I}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{C}-\lambda\mathbf{I}-\frac{h}{\lambda}\mathbf{I} & -\mathbf{U}\\ 0 & -\lambda\mathbf{I}\end{vmatrix}$$

よって

$$0=\left|\mathbf{C}-\left(\lambda+\frac{h}{\lambda}\right)\mathbf{I}\right|$$

となり、$\mathbf{C}$の固有値をΛとしたとき

$$\Lambda=\lambda+\frac{h}{\lambda}$$

を解くと$\mathbf{J}$ の固有値λが求められる。このとき$\lambda=\alpha+\beta i$, $\Lambda=\gamma+\delta i$ (iは虚数単位で$\alpha,\beta,\gamma,\delta$は実数) とすると

$$\gamma=\alpha\left(1+\frac{h}{\alpha^2+\beta^2}\right) \qquad \text{(A-5-a)}$$

$$\delta=\beta\left(1-\frac{h}{\alpha^2+\beta^2}\right) \qquad \text{(A-5-b)}$$

となることが容易に示せる。hは正だから(A-5-a)よりΛとλの実数部分の符号は一致する。漁獲努力量一定の系(10)の平衡点(11)の局所安定性は、行列$\mathbf{C}$の固有値の実数部分の正負により決まるから、このことは(11) が局所的に安定ならフィードバック系の平衡点(9)も安定であること、またその逆も成立することを意味する。

付録4
大域安定なロトカ・ボルテラ系におけるフィードバック管理

ロトカ・ボルテラ系

$$\frac{dx_i}{dt} = (k_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

のすべてのiについてx_iが0でない平衡点は、$GA + {}^t(GA)$を正値定符号にする対角成分が正の対角行列Gが存在するならば、大域的に安定である（Bean-San Goh 1980）。このとき、

$$w = \sum_{i=1}^{n} g_i\left(x_i - T_i - \frac{h_i}{T_i}\ln x_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{T_i}{h_i} g_i(e_i - e_i^*)^2$$

が、フィードバック系

$$\frac{dx_i}{dt} = (k_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)x_i - e_i x_i$$

$$\frac{de_i}{dt} = h_i \frac{x_i - T_i}{T_i}$$

のリアプノフ関数になる（ただしg_iはGのii成分である）。すなわち、$(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = (\mathbf{T}, \mathbf{e}^*)$で$w = 0$かつ$\frac{dw}{dt} = 0$、その他の点では$\frac{dw}{dt} < 0$となる。このことは、フィードバック系の平衡点、$(\mathbf{T}, \mathbf{e}^*)$、が大域的に安定であることを意味する。（この項については、重定南奈子（京都大学）および竹内康博（静岡大学）に助言をいただいた）

付録5
D-安定性と目標達成可能性

各種の資源量の変化が(3)式のようなロトカ・ボルテラ系で表される場合には、平衡点の近傍での線形化方程式(A-4)は

$$\frac{dy_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} T_i a_{ij} y_j - T_i z_i \qquad \text{(A-6-a)}$$

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{h}{T_i} y_j \qquad \text{(A-6-b)}$$

となるから、付録3のCは$-\mathbf{UA}$と表せる。すなわち相互作用の行列$-\mathbf{A}$がD-安定ならば、Cの固有値の実数部分はすべて負になり、付録3によりフィードバック系の平衡点も局所的に安定になる。